

水位を境界条件とした 1 次元不定流解析法と 水面形を与条件とした流量・粗度係数の推定法 ～矩形一様断面水路を対象として～

重枝 未玲¹・秋山 壽一郎²・阿部 琢哉³・田口 英司³

¹正会員 九州工業大学大学院准教授 工学研究院建設社会工学研究系

(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1)

E-mail:mirei@civil.kyutech.ac.jp

²フェロー会員 九州工業大学教授 (同上)

E-mail:akiyama@civil.kyutech.ac.jp

³学生会員 九州工業大学大学院 工学府建設社会工学専攻博士前期課程 (同上)

E-mail:p345301t@mail.kyutech.jp, q345312e@mail.kyutech.jp

本研究は、流量ハイドログラフや抵抗の縦断変化の予測を目的として、水位を境界条件とした 1 次元不定流解析法と観測水面形の経時変化に基づく流量・粗度係数の時空間推定法を新たに構築し、最も単純な矩形断面での不等流解析結果、不等流および不定流の実験結果に基づき、その予測精度について検討したものである。本研究から、水位を境界条件とした不定流解析法は、不等流および不定流の水位・流量を十分な精度で再現できること、本推定法 A は、不等流および不定流の流量・粗度係数を推定可能であること、本推定法は、粗度係数の逆算に用いることができること、などが確認された。

Key Words: discharge, roughness coefficient, water surface profile, steady and unsteady flow

1. はじめに

近年、安全・安心が持続可能な河川管理が求められている¹⁾。安全・安心な河川を維持するためには、既存の個々の治水施設や施設群としての治水機能を適切に評価し、その機能の維持や改善を行うための計画型管理、いわゆるストックマネジメントが今後ますます重要となる。

このようなマネジメントを行う上で、河道や治水施設の治水機能の現状を把握することが不可欠である。そのためには、洪水時の水位、流量、抵抗特性の時空間変化等を総合的に把握し、そのデータを蓄積することが重要となる²⁾。水位については、多点での連続観測が行われるようになっており、水面形の経時変化が観測されるようになってきている³⁾が、流量等については観測技術などの技術発展⁴⁾は目覚ましいものの、多点での連続観測は困難であるのが実情である。そのため、これらの把握には一般に数値解析が採用されている。

近年では観測データと数値解析結果を同化させ解析を実施するデータ同化手法を用い、流量や抵抗特性に関する予測を行う数値モデルが開発されている⁴⁾⁵⁾⁶⁾。これら

の研究から、観測水面形の時間変化を既知量とした洪水流・河床変動解析は、任意の地点での流量ハイドログラフ、粗度変化のみならず河床位の推定に有効であること⁴⁾、観測所での水位ハイドログラフと解析結果との同化手法として粒子フィルタ⁵⁾や Adjoint 法⁶⁾を用いた解析法は、洪水時の流量ハイドログラフや抵抗特性の変化の推定に有効であることが明らかとなっている。一方で、著者ら⁷⁾は、データ同化のように複数の解析観測結果から最適解を求めるのではなく、水面形を直接入力条件として、流量・粗度係数の推定法を構築し、その予測精度を示した。その結果、流量の予測精度に比べ、粗度係数の推定精度が十分でなく、同手法には課題が残った。

本研究は、以上のような背景を踏まえ、流量ハイドログラフや抵抗の縦断変化の予測を目的として、(1)水位を境界条件とした 1 次元不定流解析法と、(2)前報⁷⁾とは異なる観測水面形の経時変化に基づく流量・粗度係数の時空間推定法を新たに提案するとともに、(3)最も単純な矩形断面での不等流解析結果や不等流および不定流の実験結果に適用し、その予測精度について検討したものである。

2. 手法の概要

本研究では、以下の(1)~(3)に示す手法を用いた。なお、流れは常流を対象とした。推定法 B については前報⁷⁾で公表済みなので、以下では新たに構築した不定流解析法と推定法 A の概要について述べる。

- (1) 1次元不定流解析法(以下、不定流解析法)：上下流端の水位ハイドログラフ、粗度係数、河床位を与条件として、流量 Q (本研究の場合は単位幅流量 q)と流積 A (本研究の場合は水深 h)を予測。
- (2) 推定法 A：水面形の経時変化と上流端の粗度係数と河床位を与条件として、流量と粗度係数を推定。
- (3) 推定法 B⁷⁾：水面形の経時変化と上下流端の粗度係数、河床位を与条件として、流量と粗度係数を推定。

(1) 基礎方程式

不定流解析法および推定法 A の基礎方程式は、式(1)の1次元浅水流方程式である。

$$\begin{aligned} \partial U / \partial t + \partial E / \partial x + S &= 0 \\ U &= (h \quad q)^T; E = (q \quad q^2/h + 1/2 gh^2)^T; \\ S &= (0 \quad -ghS_0 + ghS_f) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 t =時間、 x =流下方向、 U =保存量ベクトル、 E =流束ベクトル、 S =発生項・消滅項ベクトル、 h =水深、 q =単位幅流量、 g =重力加速度、 S_0 =水路床勾配、 z_b =水路床高、 S_f = x 方向の摩擦勾配である。水路床勾配 S_0 と摩擦勾配 S_f はそれぞれ式(2)で計算される。

$$S_0 = -\partial z_b / \partial x; S_f = n^2 u |u| / R^{4/3} \quad (2)$$

ここに、 n =マンニングの粗度係数、 u =流速($=q/h$)、 R =径深である。

浅水流方程式は双曲型の偏微分方程式であるので、式(3)の流束ヤコビアン J は対角化可能であり、固有値 Λ 、右固有行列 R 、左固有行列 R^{-1} を得ることができる。

$$\begin{aligned} J = \frac{\partial E}{\partial U} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} = R \Lambda R^{-1}; \Lambda = \begin{pmatrix} u+c & 0 \\ 0 & u-c \end{pmatrix}; \\ R &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u+c & u-c \end{pmatrix}; R^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} -(u-c) & 1 \\ u+c & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

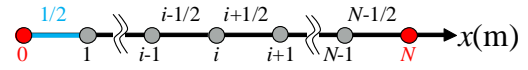
ここに、 c =波速($=gh^{0.5}$)である。

境界条件には、式(1)から導かれる式(4)の特性曲線式を用いる。

$$\begin{aligned} \partial(u+2c)/\partial t + (u+c)\partial(u+2c)/\partial x &= g(S_0 - S_f) \\ \partial(u-2c)/\partial t + (u-c)\partial(u-2c)/\partial x &= g(S_0 - S_f) \end{aligned} \quad (4)$$

(2) 離散化の概要

離散化手法と境界条件は、いずれの手法も同様である。以下では、その概要について説明する。なお、流量・水位・河床位は、図-1 に示す計算格子点で、粗度係数は



定義される諸量と位置

● : 水位・流量, 河床位 — : 粗度係数

境界条件

— : 推定法Aで粗度係数を与える区間

● : 不定流解析法で境界条件として水位ハイドログラフを与える点

● : 推定法Bで粗度係数を与える点

図-1 計算格子点と各諸量の定義位置

格子点に含まれる区間で定義する。

a) 方程式の離散化

式(1)の離散化には、流束差分⁸⁾を用いた。離散化された式(1)を式(5)に示す。発生・消滅ベクトルについても、数値流束と同様に特性速度で風上化を行った⁹⁾。

$$\frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^t}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (E_{i+1/2}^{*t} - E_{i-1/2}^{*t}) + S_{i+1/2}^{*t} + S_{i-1/2}^{*t} = 0 \quad (5)$$

ここに、 Δt 、 Δx =時間、空間の刻み幅、 i =空間に対する添字、 $E_{i+1/2}^{*t}$ 、 $S_{i+1/2}^{*t}$ は、式(6)で表される数値流束である。

$$\begin{aligned} E_{i+1/2}^{*t} &= \frac{1}{2} \left[E_{i+1}^t + E_i^t - \sum_{j=1}^2 \tilde{\alpha}^j |\tilde{\lambda}^j| \tilde{e}^j \right]; \\ S_{i+1/2}^{*t} &= \frac{1}{2} \left[\tilde{S}_{i+1/2}^t + \sum_{j=1}^2 \frac{|\tilde{\lambda}^j|}{\tilde{\lambda}^j} \tilde{\beta}^j \tilde{e}^j \right] \end{aligned} \quad (6)$$

式中の記号は、以下の通りである。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}^1 \\ \tilde{\lambda}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{u} + \tilde{c} \\ \tilde{u} - \tilde{c} \end{pmatrix}; \tilde{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} \end{pmatrix}; \tilde{e}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^1 \\ \tilde{\alpha}^2 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2\tilde{c}} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}^2 (h_{i+1} - h_i) - (q_{i+1} - q_i) \\ -\tilde{\lambda}^1 (h_{i+1} - h_i) + (q_{i+1} - q_i) \end{pmatrix}; \\ \tilde{S}_{i+1/2}^t &= \begin{pmatrix} 0 \\ g\tilde{h} \{ (z_{bi+1} - z_{bi}) + S_{\beta+1/2} dx \} \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} \tilde{\beta}^1 \\ \tilde{\beta}^2 \end{pmatrix} &= \frac{\tilde{S}_{i+1/2}^t}{2\tilde{c}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \tilde{u} = (u_{i+1}\sqrt{h_{i+1}} + u_i\sqrt{h_i}) / (\sqrt{h_{i+1}} + \sqrt{h_i}); \\ \tilde{c} &= \sqrt{g(h_{i+1} + h_i)/2}; \end{aligned} \quad (7)$$

b) 境界条件

上流端の格子番号を $i-1$ とすると、式(4)は $u-c$ 上で $d(u-2c)/dt = g(S_0 - S)$ なので、境界条件は式(8)となる。

$$\begin{aligned} \frac{q_{i-1}^{t+\Delta t}}{h_{i-1}} &= \frac{R_{i-1}^{t+\Delta t/3}}{g\Delta t m_{i-1}^2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2g\Delta t m_{i-1}^2}{R_{i-1}^{t+\Delta t/3}} \left\{ \frac{q_d^t}{h_d} + 2\sqrt{gh_{i-1}^{t+\Delta t}} - 2\sqrt{gh_{i-1}^t} + \right.} \right. \\ &\quad \left. \left. g\Delta t S_{0i-1/2} - \frac{g\Delta t}{2} \frac{n_d^2}{R_d^{t/3}} \left(\frac{q_d^t}{h_d} \right)^2 \right\} \right] \\ x_d &= \left(\frac{q_{i-1}^{t+\Delta t}}{h_{i-1}} - \sqrt{gh_{i-1}^{t+\Delta t}} + \frac{q_d^t}{h_d} - \sqrt{gh_d^t} \right) \frac{\Delta t}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、 q_d 、 h_d は上流端より x_d 下流側での単位幅流量、水深であり、格子点 i と $i-1$ の諸量を線形補間し求めた。

下流端の格子番号を $i+1$ とすると、式(4)は $u+c$ 上で $d(u+2c)/dt = g(S_0 - S)$ なので、下流端境界条件は式(9)となる。

$$\frac{q_{i+1}^{t+\Delta t}}{h_{i+1}} = \frac{R_{i+1}^{t+\Delta t/3}}{g\Delta t m_{i+1}^2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2g\Delta t m_{i+1}^2}{R_{i+1}^{t+\Delta t/3}} \left\{ \frac{q_u^t}{h_u} + 2\sqrt{gh_u^t} - 2\sqrt{gh_{i+1}^{t+\Delta t}} + \right.} \right. \\ \left. \left. g\Delta t S_{0i+1/2} - \frac{g\Delta t}{2} \frac{n_u^2}{R_u^{t/3}} \left(\frac{q_u^t}{h_u} \right)^2 \right\} \right] \quad (9)$$

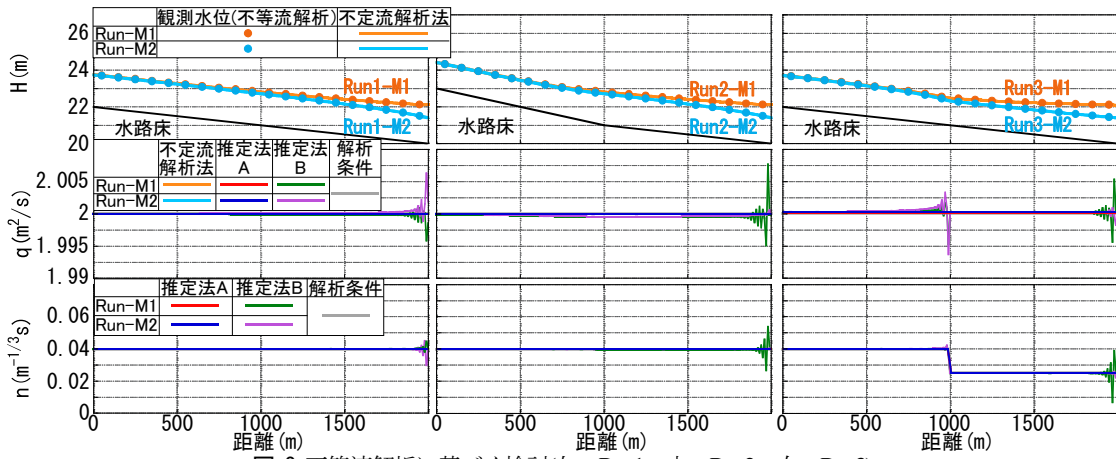


図-3 不定流解析に基づく検討(左: Run1, 中: Run2, 右: Run3)

定法 A では流量と粗度係数を再現していること、(2)一方で、推定法 B では Run1~3 では下流端近傍で、Run3 では粗度の変化区間で単位幅流量に 0.3% 程度流量の振動が生じ、その区間の粗度係数も振動していること、などがわかる。このように、不定流解析は水路床勾配や粗度が変化する水路での水位・単位幅流量を再現できること、推定法 A は、推定法 B に比べ、単位幅流量・粗度係数を高い精度で再現できること、などが確認された。

4. 定常・非定常実験結果に基づく不定流解析法及び推定法 A の検証

上記の検討から、推定法 A は、推定法 B に比べ再現精度が高いことが確認された。以下では、不定流解析法および推定法 A について、定常・非定常実験結果に基づき測定値に誤差が含まれる状況下での検証を行った。

(1) 実験の概要

実験装置は、図-4 に示す長さ 9m、幅 1m の水路である。水路床勾配は約 1/1,000 に設定されている。下流端には堰が設置されており、堰高によって水位を調節できるようになっている。また、上流端では流量計が設置されており、バルブにより流入流量が調整される。なお、等流実験より、同水路の粗度係数 $n=0.012\text{m}^{-1/3}\text{s}$ であることが確認されている。

流れは定常流(CaseS)および非定常流(CaseU)とし、CaseS については、上流から一定流量 $Q=0.01\text{m}^3/\text{s}$ (単位幅流量 $q=0.01\text{m}^2/\text{s}$) を供給し、下流端の堰高を、水面形が堰上げ背水(CaseS-M1)と低下背水(CaseS-M2)となるように設定した。CaseU では上流から一定流量 $Q=0.01\text{m}^3/\text{s}$ (単位幅流量 $q=0.01\text{m}^2/\text{s}$) を供給し、定常状態とした後、計測開始時刻から、流量計が 100 秒後に $Q=0.03\text{m}^3/\text{s}$ (単位幅流量 $q=0.03\text{m}^2/\text{s}$)、200 秒後に $Q=0.01\text{m}^3/\text{s}$ (単位幅流量 $q=0.01\text{m}^2/\text{s}$) となるように、バルブを調整した。再現性に

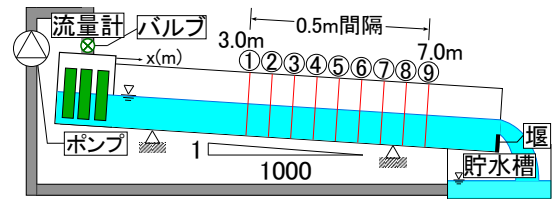


図-4 実験装置の概要

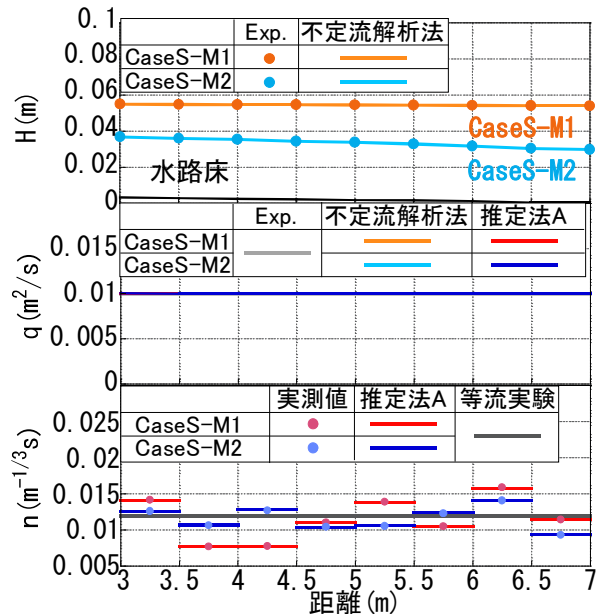


図-5 定常実験結果に基づく検証

については、同一実験を 3 回実施し、その誤差が 2.5% 以内であることを確認している。下流端の堰高は、初期の水面形が、堰上げ背水(CaseU-M1)と低下背水(CaseU-M2)となるように設定した。

測定項目は、水位 $H(\text{m})$ 、単位幅流量 $q(\text{m}^2/\text{s})$ である。水位については、CaseS ではポイントゲージで、CaseU ではビデオカメラで撮影した画像を画像解析することで、図-4 の測定点①~⑨で観測を行った。単位幅流量については、CaseS では流量計で、CaseU では、直径約 5mm の発砲スチロール球を動きをビデオカメラで撮影し PTV 解析を行うことで水表面流速を測定し、これに対数則により得られる水表面流速と水深平均流速の比をかけることで、水深平均流速を求め、この水深平均流速と

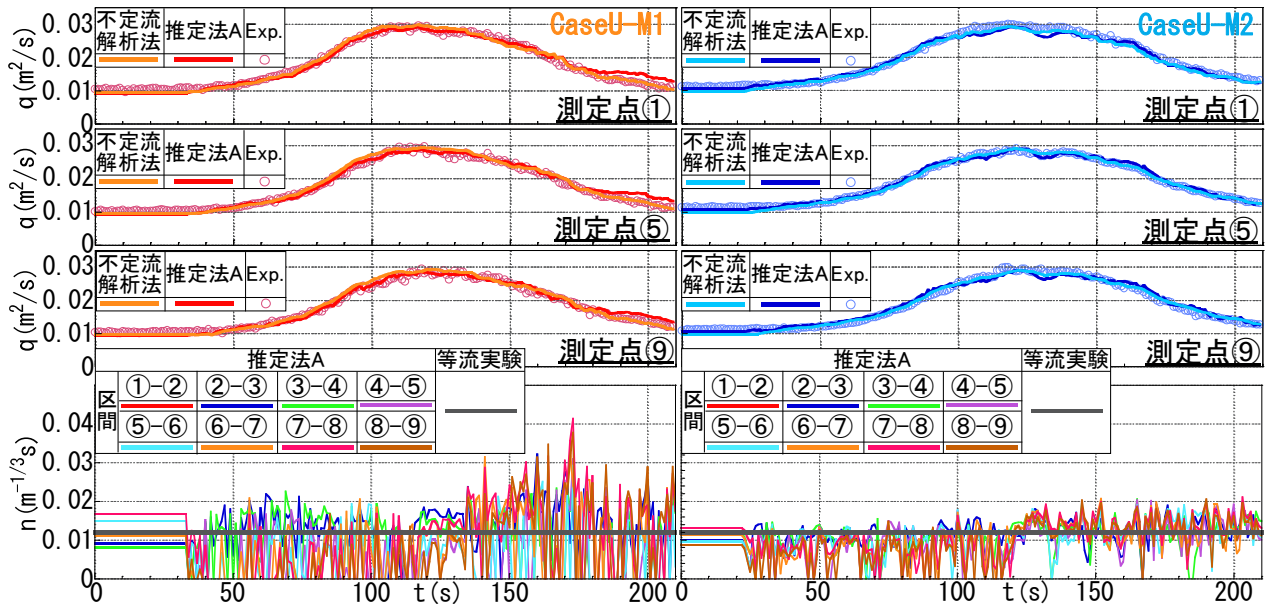


図-6 非定常実験結果に基づく検証

水位観測より得られる水深により単位幅流量を求めた。測定点①、⑤、⑨で観測を行った。

(2) 定常実験結果に基づく検証

図-5 は、CaseS について、不定流解析法の解析結果と、推定法 A の推定結果と実験値との比較を示したものである。粗度係数の実測値には、等流実験に基づく対象区間の平均的な値と実測値で算定したエネルギー勾配に基づく区間毎の値を示している。なお、区間毎の平均値は等流実験のものと同じであった。また、解析の粗度係数にはエネルギー勾配に基づく値を与えた。図-5 より、(1)不定流解析法は、いずれの Case についても、水位および流量を再現しており、その誤差は水位で最大 0.03%、流量で最大 0.34%あること、(2)推定法 A は、いずれの Case についても流量とエネルギー勾配より求めた粗度係数を再現しており、その誤差は流量で最大 0.14%、粗度係数で最大 1.1%であること、などがわかる。一方、粗度係数を等流実験で求めた値として流量を求めた場合、その相対誤差は不定流解析で 2.2%、推定法 A で 17.1%であった。このように、推定法 A は、不定流解析法に比べ、粗度係数に対する流量の変化がシビアである。

(3) 非定常実験結果に基づく検証

図-6 は、CaseU について、不定流解析法の解析結果と、推定法 A の推定結果と実験値との比較を示したものである。なお、各区間での粗度係数の経時変化が不明なため、粗度係数には等流実験の値を与えた。また、水位の不定流解析結果と実験値との相対誤差は、最大で 3%であり、概ね再現されていた。

図-6 の流量ハイドログラフから、(1)推定法 A の推定結果は、CaseU-M1 の減水時の 200 秒周辺で実測値との間に若干のずれが生じていること、(2)他の時間帯では、

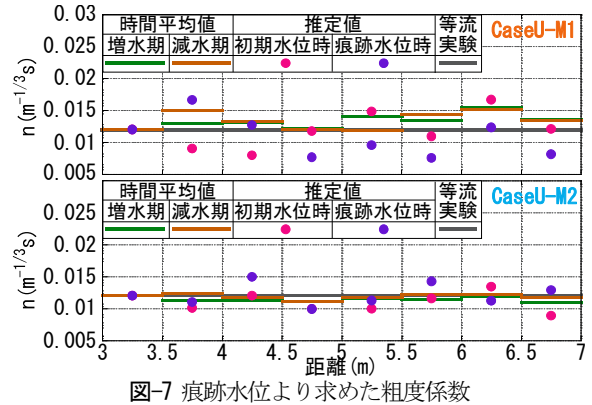


図-7 痕跡水位より求めた粗度係数

不定流解析法および推定法 A いずれも実測値を再現していること、などが確認できる。

図-6 の粗度係数の経時変化から、推定法 A の推定結果は、(1)いずれの Case についても、等流実験値の周辺で振動が生じていること、(2)その幅は CaseU-M1 が大きいこと、などが確認できる。この振動は、不定流解析結果を水位の測定値とした推定結果では発生しなかったことから、水位の測定結果に含まれる誤差のために生じるものと考えられる。不定流解析に基づく検証においても、水位に水深の 0.2%程度の誤差をランダムに与えたところ、粗度係数について最大で 96.0%の差が生じた。

図-7 は、0-10 秒の定常状態の時刻の粗度係数、痕跡水位より求めた粗度係数の空間分布の推定結果と、図-6 の粗度係数について、増水時(10~110 秒)、減水時(110~200 秒)の平均値の空間分布との比較を行ったものである。なお、時間平均を行うにあたっては、粗度係数の 2 乗が負となった場合の非物理的な粗度係数は省いた。これより、増水・減水時の粗度係数には大きな変動が生じておらず、等流実験結果から得られた $n=0.012\text{m}^{-1/3}\text{s}$ 周辺を増減しており、最大で 1.28 倍、最小で 0.91 倍になること、などがわかる。なお、CaseU-M1 は、上述した非物理的

な粗度係数が CaseU-M2 に比べ、数多く生じていたため、時間平均値は若干高めに評価されていると考えられる。

このように、本解析法および推定法は、不等流・不定流の実験結果に対して、流量を十分な精度で推定できることが確認された。また、粗度係数についても、痕跡水位に基づく粗度係数や時間平均による粗度係数には若干の差が生じるものの水路のもつ粗度係数付近の値となり、概ね妥当な値を推定できること、などが確認された。

5. おわりに

本研究では、(1)水位を境界条件とした1次元不定流解析法の開発、(2)水面形の経時変化に基づく流量と粗度係数の時空間推定法を新たに提案するとともに、その予測精度について検討した。その結果、(1)水位を境界条件とした不定流解析法は、不等流および不定流の水位・流量を十分な精度で再現できること、(2)推定法 A は、不等流および不定流の流量・粗度係数を推定可能であること、(3)推定法 A は、水位を境界条件とした不定流解析法に比べ、粗度係数の変化による流量のレスポンスがシビアであること、(4)推定法 A は、痕跡水位を用いた粗度係数の推定も可能なこと、などが確認された。今後は、上流端の粗度係数が不明な場合の推定法や複雑な縦横断面形状や河床変動下での流れや実河道への適用性について検討したいと考えている。

謝辞：本研究は、科学研究費基盤研究(C)(課題番号：16K06515、研究代表者：重枝未玲)の助成を受けたものである。また、本研究を遂行するにあたり、本学学部生の西山晋平君、武久晋太郎君には多大な協力を得た。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

1) 国土交通省：河川砂防技術基準維持管理編，

(2016.9.30 受付)

CONSTRUCTION OF NUMERICAL METHOD FOR A 1D UNSTEADY FLOW ANALYSIS AND DISCHARGE AND ROUGHNESS COEFFICIENT ESTIMATION USING TIME VARIATION OF WATER LEVEL IN RECTANGULAR CHANNEL

Mirei SHIGE-EDA, Juichiro AKIYAMA, Takuya ABE and Eiji TAGUCHI

A 1D unsteady flow analysis method and an estimation method for discharge and Manning's roughness coefficient using time variation of water level in rectangular channel were constructed. These methods were based on 1D shallow water equations and its characteristic form. The time variation of water level was used for 1D unsteady flow analysis as boundary conditions. The time variation of water surface profile was used for the estimations as input conditions. These methods were verified against numerical results of non-uniform flow and experimental data of non-uniform and unsteady flows in rectangular channel. It shows that proposed methods can predict the discharge hydrograph and the estimation method can predict the roughness coefficient with reasonable accuracy.

http://www.mlit.go.jp/river/shishin_guideline/gijutsu/gijutsukijunn/jikanri/kasen/pdf/gijutsukijun.pdf, 2011.

- 2) 国土交通省：河川砂防技術基準調査編，
http://www.mlit.go.jp/river/shishin_guideline/gijutsu/gijutsukijunn/chouasa/pdf/00.pdf, 2012.
- 3) 二瓶泰雄，木水啓：H-ADCP観測と河川流量計算を融合した新しい河川流量モニタリングシステムの構築，土木学会論文集B, Vol.63, No.4, pp.295-310, 2007.
- 4) 福岡捷二：大規模洪水に適用する河道の設計・管理技術，第50回水工学に関する夏期研修会講義集Aコース，pp.A-7-1-A-7-20, 2014.
- 5) 立川康人，須藤純一，椎葉充晴，萬和明，キムスンミン：粒子フィルタを用いた河川水位の実時間予測手法の開発，水工学論文集，第55巻，pp.S511-S516, 2011.
- 6) 吉田圭介，石川忠晴：Adjoint法による流量ハイドログラフ推定法に関する研究，土木学会論文集B1（水工学），Vol.68, No.4, pp.L1261-L1266, 2012.
- 7) 重枝未玲，秋山壽一郎，平松裕樹，阿部琢哉：矩形一様断面水路での水面形の経時変化による流量ハイドログラフの推定法，土木学会論文集B1(水工学)，Vol.72, No.4, L607-L612, 2016.
- 8) Roe, P. L.: Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol.43, pp.357-372, 1981.
- 9) Bermudez, A. and Vazquez, M.: Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms, *Computers Fluids*, Vol.8, No.8, pp.1049-1071, 1994.
- 10) 秋山壽一郎，浦勝，重枝未玲，アキレス クマール ジヤ：1次元浅水方程式のFDSに基づく数値解析，水工学論文集，第44巻，pp.473-478, 2000.
- 11) Fritsch, F.N. and Carlson, R. E.: Monotone Piecewise Cubic Interpolation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol.17(2), pp.238-246, 1980.